

پای تخته

آموزشی



محرم نژاد ایردموسی*

اشاره

«پای تخته» عنوان بخش ثابتی در «فصل نامه» برهان است که از دو بخش داخلی مسئله‌ها و راه حل‌ها تشکیل شده است. در هر شماره از فصل نامه، ۲۰ مسئله جدید مطرح می‌شود که همه خوانندگان را به چالش می‌طلبد. توصیه می‌کنیم که به طور فعال به حل آن‌ها بپردازید و راه حل‌های خود را برای انعکاس در فصل نامه، برایمان بفرستید تا با نام خودتان در شماره‌های بعد چاپ شود. از طراحان مسائل ریاضی نیز می‌خواهیم که مسائل جدید خود را برای طرح در بخش مسئله‌ها برایمان بفرستند. توجه داشته باشید که مسائل جدید باید همراه با حل (یا راه حل‌های) آن‌ها و در صورت امکان با ذکر مأخذ باشد.

مسائل و راه حل‌های خود را می‌توانید یا از طریق پستی (به آدرس فصل نامه) و یا از طریق پست الکترونیکی، برایمان بفرستید که طریقه دوم سریع تر و بهتر خواهد بود. در صورتی که خواستید از طریق پست الکترونیکی اقدام کنید، صفحات نوشته‌های خود را اسکن (با وضوح حداقل ۱۵۰ dpi) و یا تایپ کنید و بفرستید. در پایان هر سال اسامی نفرات برتر در فصل نامه درج خواهد شد و به بهترین‌ها جوایز نفیسی اهدا می‌شود. نکته آخر اینکه در چند شماره اول، سهم مسئله‌ها بیشتر است و با دریافت پاسخ‌های شما، بخش راه حل‌ها به تدریج پر بارتر خواهد شد. منتظر راه حل‌های ارسالی شما هستیم.

بخش اول: مسئله‌ها

۴۱. همه زوج اعداد حقیقی (a, b) را بیابید، به طوری که:

$$1 = c + c + c + c + c = (c^2 + c^2)(c^2 + c^2)(c^2 + c^2).$$

۴۲. مرکز دایره محاطی مثلث ABC از متوازی‌الاضلاع ABCD روی قطر BD واقع است. ثابت کنید ABCD لوزی است.

۴۳. قطرهای $A_1A_2, A_1A_3, A_1A_4, A_1A_5, A_1A_6, A_1A_7, A_1A_8, A_1A_9, A_1A_{10}$ و A_1A_{11} از شش ضلعی منتظم $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8A_9A_{10}A_{11}$ یکدیگر را قطع می‌کنند تا شش ضلعی منتظم $B_1B_2B_3B_4B_5B_6$ حاصل شود. ثابت کنید $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ نیز منتظم است.

۴۴. در مثلث ABC با طول اضلاع $|a| = |b| = |c|$ و $\angle A = 60^\circ$ ، ثابت کنید: $\angle B = 60^\circ$ و $\angle C = 60^\circ$ اگر و تنها اگر: $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{c+a+b}$.

۴۵. رقم یکان عدد $1^{2011} + 2^{2011} + 3^{2011} + \dots + 2011^{2011}$ را بیابید.

۴۶. همه اعداد طبیعی n را بیابید، به طوری که $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$ مربع کامل باشد.

۴۷. در چهارضلعی ABCD، داریم: $|a| = |b| = |c| = |d|$ و $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D$. مطلوب است اندازه زوایای چهارضلعی.

۴۸. دو قطر دوزنقه ABCD با دو قاعده AB و CD، یکدیگر را در نقطه P قطع می‌کنند. ثابت کنید مجموع مساحت دو مثلث PAB و PCD از مجموع مساحت دو مثلث PBC و PDA بیشتر است.

۴۹. نامساوی زیر را ثابت کنید:

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{2^{2011}} + \frac{1}{2^{2010}} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 1 + \frac{1}{2^{2011}} + \frac{1}{2^{2010}} + \dots + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2} < 2$$

۵۰. یک ۱۳۹۲-ضلعی به تعدادی مثلث افراز شده است.

الف) اگر $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ و $\frac{4}{5}$ اعدادی گویا باشند، آن گاه x ، y و z نیز گویا هستند.

ب) اگر تنها یکی از اعداد $\frac{2}{3}$ ، $\frac{5}{6}$ و $\frac{4}{5}$ گویا باشد، آن گاه y ، x و z گنگ هستند.

۵۵. در یک مدرسه ۱۰ کلاس وجود دارد. هر دانش آموز از یک کلاس دقیقاً با یک دانش آموز از هر یک از ۹ کلاس دیگر آشناست. ثابت کنید تعداد دانش آموزان کلاس ها یکسان است.

۵۶. مستطیل L را می توان به 200 مربع یکسان افراز کرد. همچنین می توان L را به 288 مربع یکسان افراز کرد. ثابت کنید L را می توان به 392 مربع یکسان افراز کرد.

۵۷. ثابت کنید مجموع هر سه عدد طبیعی متوالی، عددی است که مجموع مکعبات آن سه عدد را می شمارد.

۵۸. x و y دو عدد حقیقی هستند، به طوری که: $14^2 = (5-12)^2 + (5+9)^2$. کمترین مقدار $5^2 + 9^2$ را بیابید.

۵۹. حاصل عبارت $\frac{1}{113911} + \frac{1}{3113891} + \dots + \frac{1}{1391111}$ را به دست آورید.

۶۰. k و n دو عدد طبیعی هستند. ثابت کنید:

$$1 \times 2 \times \dots \times n + 2 \times 3 \times \dots \times (n+1) + \dots + \frac{(n+1) \dots (n+1) \dots (n+1)}{n+1} = \frac{(n+1) \dots (n+1) \dots (n+1)}{n+1}$$

بخش دوم: راه حل ها

۱. مجموعه $1, 2, \dots, 2005$ مفروض است.

الف) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای زوج دارد؟

ب) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای زوج و مجموع اعضای فرد دارد؟ (این مسئله دو قسمت دیگر نیز دارد. آن ها را طرح و حل کنید.)

راه حل:

الف) برای تشکیل چنین زیرمجموعه ای، ابتدا یک زیرمجموعه دلخواه از $1, 2, \dots, 2005$ انتخاب می کنیم (به 2^{n-1} طریق). سپس با توجه به تعداد اعضا و مجموع اعضای این زیرمجموعه، درباره عضویت دو عدد ۱ و ۲ در این زیرمجموعه

حداقل تعداد مثلث ها را بیابید.

۵۱. برای هر چهار ضلعی با طول اضلاع a, b, c, d و

مساحت S ثابت کنید: $4S \geq a^2 + b^2 + c^2 + d^2$

نامساوی برای کدام چهارضلعی ها به تساوی تبدیل خواهد شد؟

۵۲. عدد طبیعی M را جادویی می نامیم، هرگاه حاصل ضرب ارقام آن با مجموع ارقام آن برابر باشد.

الف) ثابت کنید برای هر $10, 11, \dots, 19$ ، عددی n رقمی و جادویی وجود دارد.

ب) ثابت کنید بی شمار عدد طبیعی جادویی وجود دارد.

۵۳. مستطیلی با طول و عرض m و n به مربعات واحد افراز شده است و $k \in \mathbb{Z}$ ، به طوری که مجموع مساحت مربعات واحدی که مجاور اضلاع مستطیل هستند، برابر است با نصف مساحت مستطیل. مقادیر طبیعی m و n را بیابید.

۵۴. فرض کنید x, y, z اندازه های زوایای یک مثلث بر حسب درجه باشند. ثابت کنید:



این معادله درجه دوم به مقدار $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi$ می‌رسیم.
۴. اعداد طبیعی را به‌طور مارپیچ مطابق شکل روی صفحه نوشته‌ایم. موقعیت عدد ۱۳۹۲ را نسبت به عدد ۱ مشخص کنید.

۷	۸	۹	۱۰
۶	۱	۲	۱۱
۵	۴	۳	۱۲
-	-	۱۴	۱۳

راه‌حل: با دنبال کردن الگو خواهیم دید که مربع اعداد فرد به‌صورت قطری قرار می‌گیرند. بزرگ‌ترین مربع عدد فرد که از ۱۳۹۲ کوچک‌تر است، $37^2 = 1369$ است. بنابراین اگر عدد ۱ را در مبدأ مختصات فرض کنیم، عدد ۱۳۶۹ در نقطه (۱۸، ۱۸) واقع می‌شود. در نتیجه عدد ۱۳۷۰ در نقطه (۱۹، ۱۸)، عدد ۱۳۷۱ در نقطه (۱۹، ۱۷)، ... و عدد ۱۳۹۲ در نقطه (۱۹، -۴) واقع می‌شود.

۵. زوج (x, y) از اعداد طبیعی را مربع می‌نامیم، هرگاه $x+y$ و $x.y$ هر دو مربع کامل باشند (مانند ۲ و ۵). ثابت کنید هیچ مربعی موجود نیست که یکی از مؤلفه‌هایش ۳ باشد.

راه‌حل: حکم را به روش برهان خلف اثبات می‌کنیم. فرض کنید $(3, y)$ یک مربع باشد. در نتیجه: $3 + y = 3^2$ و $3y = 3^2$ که در آن‌ها، $3 \in y$. در نتیجه: $9 = 3^2 - 3^2$. پس از این تساوی نتیجه می‌شود که b باید مضرب ۳ باشد. پس فرض می‌کنیم: $3 = 3^2$ و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. در نتیجه: $3 = 3^2 - 3^2$. از این تساوی نتیجه می‌شود که a باید مضرب ۳ باشد. بنابراین فرض می‌کنیم: $3 = 3^2$ و در معادله جای‌گذاری می‌کنیم. در نتیجه: $1 = 3^2 - 3^2$. بنابراین: $1 = 3^2 - 3^2$. از طرف دیگر می‌دانیم مربع هر عدد صحیح یا به فرم $3k$ است و یا به فرم $3k+1$ و هیچ‌وقت به فرم $3k+2$ (یا $3k-1$) نخواهد بود. (چرا؟) در نتیجه 3 نمی‌تواند با $1 - 3^2$ برابر باشد و تناقض است. این تناقض نشان می‌دهد $(3, y)$ نمی‌تواند مربع باشد.

۶. دستگاه معادلات زیر را در مجموعه اعداد حقیقی حل کنید

$$\begin{cases} 2(9 + 5 - 2) = 5(9 - 5 + 2) \\ 3(5 - 1) + 5(9 - 1) = 50 - 1 \end{cases}$$

راه‌حل: می‌توان معادله اول را به $(5+2)(5-2) = (5-2)(5+2)$ و تبدیل کرد. دو حالت در نظر می‌گیریم: در حالت اول، اگر: $5-2 = 0$ ، آن‌گاه $5 = 2$ و با جای‌گذاری در دو معادله، به

تصمیم می‌گیریم. اگر تعداد اعضا و مجموع اعضای زیرمجموعه انتخابی هر دو فرد بودند، تنها عدد ۱ را به زیرمجموعه اضافه می‌کنیم تا به شرایط مطلوب برسیم. اگر تعداد اعضا فرد و مجموع اعضا زوج بود، تنها عدد ۲ را به زیرمجموعه اضافه می‌کنیم و... در نتیجه تعداد زیرمجموعه‌های مطلوب برابر است با: $2^{(n-2)}$

(ب) به طریق مشابه ثابت می‌شود که تعداد زیرمجموعه‌های خواسته شده برابر است با: $2^{(n-2)}$.

دو قسمت دیگر که به طریق مشابه می‌توان آن‌ها را حل کرد چنین هستند:

(ج) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضای فرد و مجموع اعضای زوج دارد؟

(د) X چند زیرمجموعه با تعداد اعضا و مجموع اعضای فرد دارد؟

۲. در ساعت ۹ صبح، عقربه‌های ساعت زاویه ۹۰ درجه با هم می‌سازند. بعد از ساعت ۹، اولین زمانی را مشخص کنید که مجدداً دو عقربه زاویه ۹۰ درجه با هم می‌سازند. **راه‌حل:** فرض کنید x دقیقه بعد از ساعت ۹، مجدداً این اتفاق بیفتد. در این x دقیقه، عقربه دقیقه‌شمار $6x$ درجه و عقربه ساعت‌شمار $\frac{1}{2}x$ درجه را طی کرده‌اند. بنابراین زاویه بین آن‌ها برابر است با: $\frac{1}{2}x + 270 - 6x = 90$. در نتیجه: $270 - 6x + \frac{1}{2}x = 90$ و $270 - 6x + \frac{1}{2}x = 90$. بنابراین بعد از حدود $32\frac{4}{11}$ دقیقه، مجدداً زاویه بین دو عقربه قائمه خواهد شد.

۳. عدد حقیقی x را بیابید، به‌طوری که جزء اعشاری، جزء صحیح و خود عدد

(الف) سه جمله متوالی یک تصاعد حسابی باشند.

(ب) سه جمله متوالی یک تصاعد هندسی باشند.

راه‌حل:

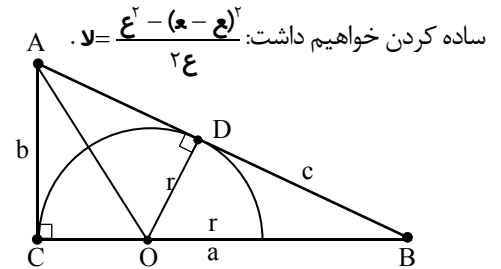
(الف) باید داشته باشیم: $2 = 2 + 0$ و $0 = 0 + 0$ که در آن، $\{x\}$ همان جزء اعشاری x و $[x]$ همان جزء صحیح عدد است. در نتیجه چون: $2 = 2 + 0$ ، پس $2 = 2 + 0$. اما می‌دانیم: $1 \leq 2 \leq 0$ و تنها دو حالت $2 = 2 + 0$ و $0 = 0 + 0$ یا $1/5 = 0$.

(ب) باید داشته باشیم: $2 = 2 + 0$ و $0 = 0 + 0$ می‌دانیم: $1 \leq 2 \leq 0$ و $0 < 2$. در نتیجه: $2 = 2 + 0$ و $0 = 0 + 0$. اما چون $[x]$ عددی صحیح است، تنها مقدار قابل قبول در نامساوی $2 = 2 + 0$ ، مقدار 2 است. در نتیجه باید داشته باشیم: $1 = (2-1) = 0$ و $0 < 2 \leq 0$ با حل

معادله $3 - 2w + w^2 = 0$ می‌رسیم که دو جواب دارد: $w = 1$ و $w = -3$. در حالت دوم، اگر $5 - 2 \neq 0$ ، آن‌گاه: $5 = 5 + 2$. با جای‌گذاری در معادله دوم به معادله $(5^2 - 1)(5^2 + 3) = 0$ می‌رسیم و سه جواب $\pm 1, -\frac{3}{2}$ برای مقدار y به‌دست می‌آید. در نتیجه جواب‌های دستگاه عبارت‌اند از: $(1, 2), (-3, 2), (3, 1), (1, -1)$ و $(-\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$.

۷. مطابق شکل، نیم‌دایره C' در داخل مثلث قائم‌الزاویه‌ای با طول اضلاع a, b, c محاط شده است. شعاع نیم‌دایره را برحسب a, b, c به‌دست آورید.

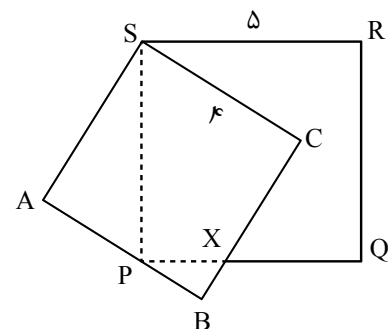
راه‌حل: مرکز نیم‌دایره را O و نقطه تماس نیم‌دایره با ضلع AB را D می‌نامیم. O را به A و D وصل می‌کنیم. چون: $\angle B = \angle D = 90^\circ$ ، در نتیجه نقطه O روی نیم‌ساز زاویه A واقع است و در نتیجه: $\angle CAO = \angle DAO$. حال رابطه فیثاغورث را در مثلث ODB می‌نویسیم. داریم: $(a - r)^2 = (b - r)^2 + r^2$. پس از



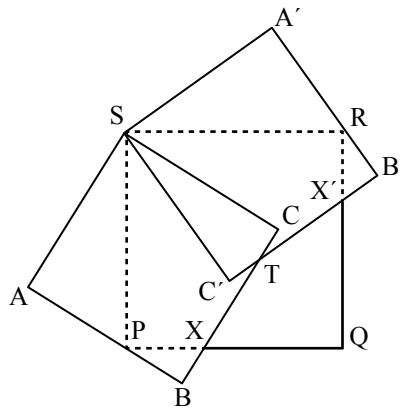
شکل ۱

۸. ثابت کنید یک مربع 5×5 را می‌توان با سه مربع 4×4 پوشاند.

راه‌حل: مربع $SABC$ به ضلع ۴ را مطابق شکل ۲ طوری روی مربع $SPQR$ به ضلع ۵ قرار می‌دهیم که طول AP برابر ۳ و طول PB برابر ۱ باشد. از تشابه دو مثلث SAP و PBQ می‌توان نتیجه گرفت: $\frac{5}{4} = \frac{SQ}{PB}$. مربع دوم به ضلع ۴ را مطابق شکل ۳ و به طریق مشابه در صفحه قرار می‌دهیم. با توجه به اینکه QB و QB' هر دو طولی برابر $\frac{3}{5}$ دارند، به راحتی می‌توان چهارضلعی $TBQB'$ را با مربع سوم پوشاند (چرا؟).



شکل ۲



شکل ۳

۹. با فرض $z = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)\dots(2^{1024}+1) + 1$

حاصل $\frac{1}{z^{1024}}$ را بیابید.

راه‌حل:

$$z = (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)\dots(2^{1024} + 1) + 1$$

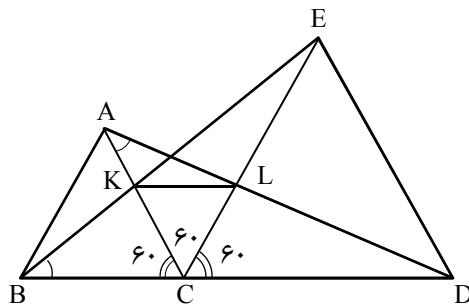
$$= (2^4 - 1)(2^4 + 1)\dots(2^{1024} + 1) = \dots$$

$$= (2^{1024} - 1)(2^{1024} + 1) + 1 = 2^{2048}$$

در نتیجه: $\frac{1}{z^{1024}} = 2^2 = 4$.

۱۰. دو مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و CDE در یک طرف خط راست BCD هستند. اگر AC, BE را در K و BD و CE را در L قطع کند، ثابت کنید KL موازی‌اند.

راه‌حل: چون $\angle B = \angle C = 60^\circ$ ، در نتیجه: $\angle B = \angle C = 60^\circ$. بنابراین: $\angle B = \angle C = 60^\circ$. چون $B = C$ و $B = C$ ، در نتیجه دو مثلث BCE و ACD هم‌نهشتند. پس: $\angle B = \angle C = 60^\circ$ و در نتیجه دو مثلث BCK و ACL هم‌نهشتند. در نتیجه $\angle B = \angle C = 60^\circ$ که نشان می‌دهد، مثلث CKL متساوی‌الاضلاع است و $\angle C = 60^\circ$. در نتیجه از تساوی دو زاویه BCK و CKL ، موازی BC و KL نتیجه می‌شود.



شکل ۴

* iradmusa@yahoo.com